AULAS PREPARATÓRIAS PARA A OBA - SELETIVAS INTERNACIONAIS

Aula 9
Galáxias, expansão do Universo e buracos negros

Do brilho de bilhões de estrelas aos objetos mais compactos do Universo

Isabelle Gios Martimiano

06/11/2026

1. O que é uma galáxia?

Uma **galáxia** é um sistema gravitacional formado por estrelas, gás, poeira, remanescentes estelares e matéria escura.

Componentes visíveis

- estrelas e aglomerados;
- gás interestelar;
- poeira;
- regiões de formação estelar.

Escalas

As galáxias podem conter de milhões a centenas de bilhões de estrelas e possuir dimensões de milhares a centenas de milhares de anos-luz.

Uma galáxia não é apenas um "aglomerado enorme de estrelas": há matéria entre as estrelas e uma estrutura gravitacional global.

2. Tipos de galáxias

Uma classificação morfológica básica separa as galáxias em três grupos principais.

Espirais

Disco, bojo central e braços espirais.

Ricas em gás e poeira, com formação estelar importante no disco.

Elípticas

Forma aproximadamente elipsoidal, variando de quase esférica a bastante achatada.

Classificação: $E0$ até $E7$.

Irregulares

Não apresentam uma estrutura espiral ou elíptica bem definida.

3. Galáxias elípticas: classificação E_n

As galáxias elípticas são classificadas pelo seu **grau de achatamento**:

$$\boxed{E0,\ E1,\ E2, \ldots, E7}$$

$$\boxed{n = 10\left(1 - \frac{b}{a}\right)}$$

$a =$ semieixo maior $\qquad b =$ semieixo menor $\qquad n =$ índice morfológico

Como interpretar?

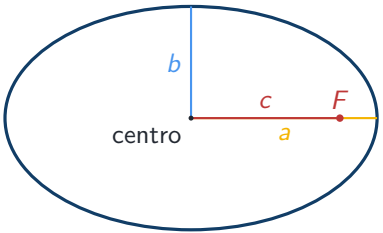
Se a galáxia é quase circular, então $b \approx a$ e, portanto, $\frac{b}{a} \approx 1 \Rightarrow n \approx 0$. Nesse caso, ela é classificada como $E0$.

À medida que b fica menor em relação a a, a razão b/a diminui, o valor de n aumenta e a galáxia aparece mais achatada.

$$\boxed{E0 \to E1 \to \cdots \to E7}$$

4. E o que é a excentricidade e?

A **excentricidade** e é uma propriedade geométrica da elipse. Ela também indica o quanto a elipse é alongada, mas **não é o mesmo que** n.



a: semieixo maior b: semieixo menor
c: distância do centro ao foco

e descreve a geometria da elipse; n fornece a classificação E_n.

Excentricidade

$$e = \frac{c}{a}$$

- $e = 0$: círculo;
- quanto maior e, mais alongada é a elipse.

Além disso:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Portanto,

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}$$

5. A Via Láctea

A Via Láctea é uma **galáxia espiral barrada**.

Estrutura básica

- disco;
- braços espirais;
- bojo central;
- barra;
- halo.

Onde estamos?

O Sistema Solar está no disco, longe do centro galáctico.

No centro encontra-se **Sagittarius A***, o buraco negro supermassivo da Via Láctea.

O buraco negro central não é o responsável por manter sozinho toda a Galáxia unida.

6. Meio interestelar: gás, poeira e extinção

O espaço entre as estrelas não é vazio. Ele contém o **meio interestelar**.

O que existe ali?

- gás, principalmente hidrogênio e hélio;
- poeira interestelar;
- moléculas e plasma em diferentes fases.

Efeito observacional

A poeira absorve e espalha parte da luz visível.

mais poeira $\Rightarrow$ menor brilho aparente no visível

Regiões escuras da Via Láctea não significam necessariamente ausência de estrelas.

7. Tamanho, volume e distância média entre estrelas

Aproximando a galáxia por uma esfera de raio R:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Para N estrelas distribuídas de modo aproximadamente uniforme:

$$V_\star \approx \frac{V}{N}$$

A separação típica entre estrelas vizinhas é uma escala linear:

$$d \sim \left(\frac{V}{N}\right)^{1/3}$$

Ideia-chave

A raiz cúbica transforma um **volume por estrela** em um **comprimento típico**.

8. Brilho integrado de uma galáxia

A luz de uma galáxia é a soma dos fluxos de suas estrelas.
Para N estrelas idênticas, cada uma com fluxo $F_\star$:

$$F_{\text{total}} = NF_\star$$

Usando a relação de Pogson, obtemos:

$$\boxed{m_{\text{total}} = m_\star - 2{,}5 \log_{10} N}$$

ou

$$\boxed{m_\star = m_{\text{total}} + 2{,}5 \log_{10} N}$$

Cuidado

Magnitudes **não são somadas diretamente**. Primeiro somamos fluxos.

9. Interações e fusões de galáxias

Galáxias próximas exercem forças gravitacionais umas sobre as outras e podem interagir ou se fundir.

O que pode mudar?

- órbitas das estrelas;
- distribuição de gás;
- forma da galáxia;
- taxa de formação estelar.

Escala de tempo

Em uma questão, pode ser fornecida uma expressão do tipo

$$T \propto \frac{r^2 v}{M}$$

Logo, é essencial identificar corretamente unidades de r, v, M e T.

10. Redshift e blueshift

Comparamos o comprimento de onda observado com o valor medido em laboratório:

$$\boxed{z = \frac{\lambda_{\text{obs}} - \lambda_0}{\lambda_0}}$$

Redshift

$$\lambda_{\text{obs}} > \lambda_0$$

$$z > 0$$

No contexto das questões, indica **afastamento**.

Blueshift

$$\lambda_{\text{obs}} < \lambda_0$$

$$z < 0$$

Indica **aproximação**.

11. Redshift e velocidade para baixas velocidades

Para $v \ll c$, usamos a aproximação Doppler:

$$\boxed{\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \approx \frac{v}{c}}$$

Como $z = \Delta\lambda/\lambda_0$,

$$\boxed{v \approx cz}$$

Leitura física

Maior deslocamento relativo para o vermelho $\Rightarrow$ maior velocidade de recessão, no regime não relativístico.

Atenção

Para grandes redshifts cosmológicos, essa aproximação simples deixa de ser adequada. Nas questões básicas, use a relação fornecida ou a interpretação qualitativa pedida.

12. Lei de Hubble-Lemaître

Em grande escala, a velocidade de recessão de uma galáxia é aproximadamente proporcional à sua distância:

$$\boxed{v = H_0 d}$$

- v = velocidade de recessão, geralmente em km/s;
- d = distância, geralmente em Mpc;
- H_0 = constante de Hubble, em km/s/Mpc.

Exemplo

Para $H_0 = 72\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$ e $d = 2\,\mathrm{Mpc}$:

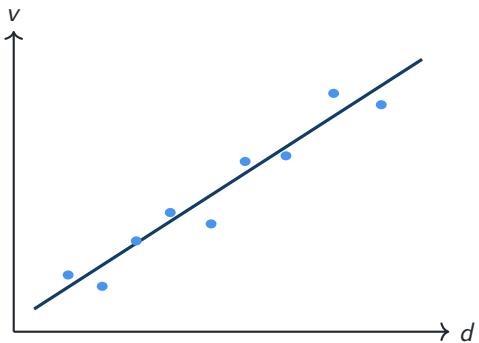
$$v = 72 \times 2 = 144\,\mathrm{km/s}.$$

13. O gráfico de Hubble não é uma reta perfeita

A expansão fornece a tendência geral

$$v \approx H_0 d,$$

mas galáxias também possuem **velocidades peculiares** causadas por interações gravitacionais locais.



Por que há dispersão?

- atração entre galáxias próximas;
- movimento dentro de grupos e aglomerados;
- velocidades locais somadas ao fluxo de Hubble.

14. Expansão do Universo: a evidência observacional

O ponto central é combinar duas observações:

1. espectros de muitas galáxias apresentam **desvio para o vermelho**;
2. a velocidade de recessão (velocidade com que uma galáxia se afasta de nós) aumenta, em média, com a distância.

$$\boxed{d \uparrow \quad \Rightarrow \quad v_{\text{recessão}} \uparrow}$$

Interpretação

Isso é uma evidência de que o Universo está em expansão em grande escala.

Não confunda

A expansão cosmológica não significa que toda galáxia individual se afasta de toda outra galáxia. Sistemas gravitacionalmente ligados podem se aproximar ou orbitar entre si.

15. Tempo de Hubble

Após converter as unidades de distância, H_0 tem dimensão de inverso de tempo:

$$\boxed{t_H = \frac{1}{H_0}}$$

Para

$$H_0 \approx 70\,\frac{\mathrm{km/s}}{\mathrm{Mpc}}, \qquad 1\,\mathrm{Mpc} \approx 3{,}09 \times 10^{19}\,\mathrm{km},$$

obtemos aproximadamente

$$\boxed{t_H \approx 14 \text{ bilhões de anos}}.$$

Significado

É uma **escala característica de tempo** da expansão e, em modelos simples, uma estimativa aproximada da idade do Universo.

16. O que é um buraco negro?

Um buraco negro é uma região em que a gravidade é tão intensa que existe uma fronteira além da qual sinais não conseguem retornar ao exterior.

Conceitos principais

- massa extremamente concentrada;
- horizonte de eventos;
- forte curvatura do espaço-tempo;
- pode ser detectado indiretamente pela matéria e estrelas ao redor.

Dois grupos importantes

- **estelares**: remanescentes do colapso de estrelas massivas;
- **supermassivos**: milhões ou bilhões de massas solares, encontrados no centro de muitas galáxias.

Sagittarius A* é o buraco negro supermassivo no centro da Via Láctea.

17. Como "pesamos" Sagittarius A*?

Observamos estrelas orbitando a região central da Via Láctea.
Para uma órbita circular:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{GM}{R}}}$$

Logo,

$$\boxed{M = \frac{v^2 R}{G}}$$

Se conhecemos o período orbital P,

$$2\pi R = vP \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = \frac{vP}{2\pi}}$$

Combinando:

$$\boxed{M = \frac{v^3 P}{2\pi G}}$$

18. Raio de Schwarzschild

Para um buraco negro não rotativo, o raio associado ao horizonte de eventos é

$$\boxed{R_S = \frac{2GM}{c^2}}$$

- G = constante gravitacional;
- M = massa do buraco negro;
- c = velocidade da luz.

Da fórmula:

$$\boxed{R_S \propto M}$$

Regra de escala

Se um buraco negro possui 10^5 vezes mais massa, seu raio de Schwarzschild também é 10^5 vezes maior.

19. Raio, volume e densidade de um buraco negro

Como $R_S \propto M$, então

$$\boxed{V \propto R_S^3 \propto M^3}$$

e, para dois buracos negros,

$$\boxed{\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{M_1}{M_2}\right)^3}.$$

A densidade média escala como

$$\rho \sim \frac{M}{V} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho_{\text{média}} \propto M^{-2}}.$$

Resultado curioso

Quanto **mais massivo** o buraco negro, **menor** pode ser sua densidade média calculada usando o volume interno ao horizonte.

20. Deflexão gravitacional da luz

A gravidade altera a trajetória da luz. Em campo fraco:

$$\boxed{\theta \approx \frac{4GM}{c^2 b}}$$

Se a questão usa $b = R_S$,

$$R_S = \frac{2GM}{c^2} \quad \Rightarrow \quad \theta \approx \frac{4GM}{c^2 R_S} = 2 \text{ rad}.$$

Como $1\,\text{rad} \approx 57{,}3°$,

$$\boxed{\theta \approx 114{,}6°}.$$

Estratégia

"Raio mínimo" de um buraco negro $\Rightarrow$ pense em **raio de Schwarzschild**.

21. Esfera de influência gravitacional

Em uma galáxia, o buraco negro supermassivo domina diretamente o movimento das estrelas apenas em uma região central limitada.
Uma escala usada é

$$r_i \approx \frac{GM_{\mathrm{BN}}}{\sigma^2}$$

onde σ caracteriza a dispersão das velocidades estelares.

Massa maior

$$M_{\mathrm{BN}} \uparrow \Rightarrow r_i \uparrow$$

Dispersão maior

$$\sigma \uparrow \Rightarrow r_i \downarrow$$

porque $r_i \propto 1/\sigma^2$.

22. O que mantém a Via Láctea unida?

É incorreto imaginar que Sagittarius A* "segura" toda a Via Láctea.

A gravidade total vem da distribuição de massa da Galáxia

- estrelas;
- gás;
- poeira;
- remanescentes estelares;
- **matéria escura**.

A influência direta de Sgr A* domina apenas nas regiões centrais. Muito longe do centro, como na posição do Sol, o potencial gravitacional global da Galáxia é muito mais importante.

Não confunda "buraco negro central" com "fonte de toda a gravidade da galáxia".

23. Buraco negro em sistema binário

A dinâmica orbital pode revelar a massa de um companheiro invisível.

$$\boxed{M_1 + M_2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G P^2}}$$

Se a massa da estrela é conhecida:

$$\boxed{M_{\mathrm{BN}} = \frac{4\pi^2 a^3}{G P^2} - M_\star}$$

Atenção às unidades

Use a em **metros**, P em **segundos** e massas em **quilogramas** antes de substituir na fórmula em SI.

24. Radiação Hawking

Na descrição quântica, um buraco negro possui uma temperatura associada à **radiação Hawking**.
Usando h em vez de $\hbar$:

$$T_{\mathrm{BN}} = \frac{hc^3}{16\pi^2 G M_{\mathrm{BN}} k_B}$$

O ponto mais importante para comparação é

$$T_{\mathrm{BN}} \propto \frac{1}{M_{\mathrm{BN}}}$$

BN menos massivo

Temperatura Hawking maior.

BN mais massivo

Temperatura Hawking menor.

25. Dilatação temporal gravitacional

Em um campo gravitacional intenso, relógios em posições diferentes podem marcar tempos diferentes.
Para um buraco negro não rotativo:

$$\boxed{t_0 = t_f \sqrt{1 - \frac{R_S}{R}}}$$

t_0 = tempo medido próximo ao buraco negro
t_f = tempo medido por um observador distante
R_S = raio de Schwarzschild
R = distância ao centro

Comportamento

$R \to R_S$ faz o fator $\sqrt{1 - R_S/R}$ diminuir, aumentando a diferença entre os tempos medidos.

26. Escalas logarítmicas: cuidado ao ler gráficos

Algumas questões fornecem relações em gráficos com eixos logarítmicos.

Em escala logarítmica

Marcas igualmente espaçadas podem representar

$$10^2,\ 10^3,\ 10^4,\ 10^5, \ldots$$

e não

$$2,\ 3,\ 4,\ 5, \ldots$$

Passo 1

Leia o **expoente** correspondente ao ponto no gráfico.

Passo 2

Só depois converta o valor para a grandeza física pedida e aplique as fórmulas.

Isso é essencial na questão de 2025 envolvendo a massa do buraco negro Gargantua.

27. Como conectar os conteúdos numa questão longa

Uma questão de seletiva pode encadear vários conceitos.



Exemplos:

- órbita → massa → temperatura Hawking;
- gráfico → massa → R_S → dilatação temporal;
- massa → R_S → volume → densidade.

Resolva uma etapa de cada vez e mantenha as unidades sob controle.

28. Armadilhas frequentes

Não faça

- somar magnitudes diretamente;
- confundir redshift com aproximação;
- esquecer que H_0 tem unidade por distância;
- usar anos em uma fórmula que exige segundos;
- confundir horizonte de eventos com uma superfície material.

Faça

- converta fluxos antes de combinar magnitudes;
- compare λ_{obs} e λ_0;
- escreva as unidades de H_0;
- use proporções antes de contas longas;
- procure relações de escala: $R_S \propto M$, $V \propto M^3$, $T_H \propto 1/M$.

29. Kit de fórmulas: galáxias e expansão

Galáxias

$$n = 10\left(1 - \frac{b}{a}\right)$$

$$e = \frac{c}{a}, \qquad a^2 = b^2 + c^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$d \sim \left(\frac{V}{N}\right)^{1/3}$$

$$m_{\mathrm{total}} = m_\star - 2{,}5 \log N$$

Redshift e Hubble

$$z = \frac{\lambda_{\mathrm{obs}} - \lambda_0}{\lambda_0}$$

$$v \approx cz \quad \text{(baixo } z\text{)}$$

$$v = H_0 d$$

$$t_H = \frac{1}{H_0}$$

30. Kit de fórmulas: buracos negros

Dinâmica e horizonte

$$M = \frac{v^2 R}{G}$$

$$R = \frac{vP}{2\pi}$$

$$M_1 + M_2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GP^2}$$

$$R_S = \frac{2GM}{c^2}$$

$$r_i \approx \frac{GM}{\sigma^2}$$

Efeitos físicos

$$V \propto R_S^3 \propto M^3$$

$$\rho_{\text{média}} \propto M^{-2}$$

$$T_H = \frac{hc^3}{16\pi^2 GMk_B}$$

$$t_0 = t_f \sqrt{1 - \frac{R_S}{R}}$$

$$\theta \approx \frac{4GM}{c^2 b}$$

Resolução dos exercícios

Provas de 2021 a 2025

Questões comentadas

Resolução dos exercícios

Q5 - P3 2021

5) O grau de achatamento, n, de uma galáxia elíptica é um número natural entre 0 e 7 que pode ser determinado pela seguinte expressão:

$$n = 10 \times \left(1 - \frac{b}{a}\right).$$

Sendo a e b os semieixos maior e menor de uma galáxia, respectivamente, quando analisada no visível. Desta forma, uma galáxia elíptica poderá ser classificada como $E0$ (esférica), $E1$, ... $E6$, $E7$ (mais achatada).

Caso uma galáxia elíptica apresente um perfil de excentricidade (achatamento) **e** = 0,5, como ela poderia ser classificada?

a) E1

b) E3

c) E5

d) E7

Q5 - P3 2021

Resposta: a) E1

Do conceito de excentricidade da elipse, temos que:

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow c = 0{,}5\,a$$

Da relação pitagórica entre os semieixos de uma elipse e a distância focal, vem:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Aplicando na expressão do enunciado,

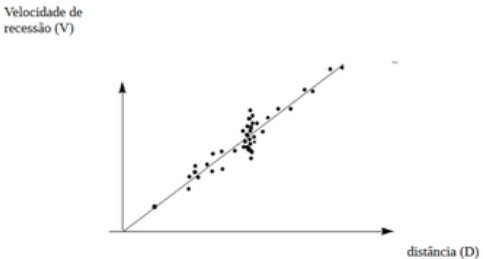
$$n = 10 \times \left(1 - \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a}\right) \therefore n \approx 1{,}3$$

Como n deve ser um número natural, o valor mais próximo seria 1. Portanto, teríamos uma galáxia do tipo E1.

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE ASTRONOMIA E ASTRONÁUTICA

Q7 - P3 2021

7) O gráfico abaixo mostra a velocidade de recessão V, de um conjunto de galáxias, em função da distância D à Terra. Este é o famoso gráfico que deu origem à Lei de Hubble: existe uma relação linear entre a distância em que está a galáxia e a velocidade com que esta se afasta do observador. No entanto, são relativamente poucos os pontos que estão exatamente alinhados ao longo da reta.



Sabendo que a dispersão dos pontos é real, e não é consequência de incertezas observacionais, marque a opção que traz a possível razão para esta dispersão.

a) A atração gravitacional entre galáxias próximas

b) A metalicidade das galáxias

c) A excentricidade das galáxias

d) A idade das galáxias

Resolução dos exercícios

Q7 - P3 2021

Resposta: a) A atração gravitacional entre galáxias próximas

As demais opções não influenciariam as velocidades das galáxias.

Q9 - P3 2021

9) PARAMETRIZADA

A maioria das galáxias conhecidas já sofreu algum tipo de interação com outra galáxia em alguma época.

O tempo T que duas galáxias demoram para se fundirem, em Ganos (1 Giga-ano = 1×10^9 anos), pode ser calculado através de:

$$T = (2{,}64 \times 10^5)\, r^2\, v / 2M$$

Onde **r** é a distância entre as galáxias, em kpc, **v** é a velocidade da galáxia secundária em relação à principal, em km/s, e **M** é a massa da galáxia secundária, em massas solares ($M_{Sol} = 1{,}98 \times 10^{30}$ kg).

Considere que a galáxia secundária tenha massa $M = 1{,}40 \times 10^{41}$ kg, está a r = 30 kpc da galáxia principal e viaja na sua direção com velocidade v = 360 km/s.

O tempo T, em Ganos, para que as duas galáxias se fundam será de, aproximadamente:

a) 0,605

b) 0,020

c) 1,210

d) 7,260

Q9 - P3 2021

Resposta: a) 0,605 Gano

$$M = \frac{1{,}40 \times 10^{41}}{1{,}98 \times 10^{30}} \cong 7{,}07 \times 10^{10}\ M_{Sol}$$

Substituindo-se os valores:

$$T = \frac{2{,}64 \times 10^{5} \times 30^{2} \times 360}{2 \times 7{,}07 \times 10^{10}} \rightarrow T \cong 0{,}605$$

Q14 - P3 2021

14) O efeito de deflexão de raios luminosos por campos gravitacionais, foi uma das predições da Teoria da Relatividade Geral. Essa deflexão, para o caso da luz proveniente de estrelas e passando pela proximidade do Sol (ver figura fora de escala), foi observada pela primeira vez durante o eclipse total do Sol de 1919.



De acordo com a Teoria, a deflexão é dada por:

$$\theta = \frac{4GM}{c^2 R}$$

Na equação, a Constante Gravitacional Universal **G** = 6,67 x 10^{-11}N.m^2.kg^{-2}; a massa do Sol **M** = 1,98 × 10^{30} kg; a velocidade da luz no vácuo: **c** = 3,0 × 10^8m/s e o raio do Sol **R** = 6,96 x 10^8m

Para o caso da luz de uma estrela distante passando tangente à superfície solar, produz uma deflexão de $\theta \cong$ 1,74''.

Se, hipoteticamente, o Sol fosse um buraco negro (com 1 massa solar), qual seria o valor dessa deflexão, aproximadamente? Considere, para este cálculo, que o Sol tem o raio mínimo para isso e o raio de luz é tangente ao seu raio.

a) 114,59°

b) 57,30°

c) 171,89°

d) 76,39°

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE ASTRONOMIA E ASTRONÁUTICA

Q14 - P3 2021

Resposta: a) 114,59°

O raio mínimo do Sol será o raio de Schwarzschild, que pode ser encontrado colocando-se a velocidade de escape do Sol igual à velocidade da luz:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = c \rightarrow R_{Sch}^{Sol} = \frac{2GM_{Sol}}{c^2}$$

$$\theta = \frac{4GM_{Sol}}{c^2 \frac{2GM_{Sol}}{c^2}} = 2\,rad \rightarrow \theta \cong 114{,}59°$$

Q6 - P2 2022

6) Em 2020, Reinhard Genzel e Andrea Ghez ganharam o Prêmio Nobel de Física por terem demonstrado a existência de um buraco negro supermassivo no centro da Via Láctea. O problema a seguir propõe, de forma bastante simplificada, o método que eles utilizaram.

Ghez e Genzel observaram uma estrela, com órbita circular, ao redor do centro de nossa galáxia. O deslocamento Doppler das linhas espectrais mostrou que o módulo da velocidade orbital (corrigido pela inclinação da órbita em relação à linha de visada) era constante e com o valor de V = 1.783 km/s, com período orbital de P = 20,2 anos.

Assinale a opção que traz a massa aproximada deste buraco negro, em termos de massas solares (M_{Sol}).

Dados: Massa do Sol $M_{Sol} = 2{,}0 \times 10^{30}$ kg; Constante Gravitacional Universal $G = 6{,}7 \times 10^{-11}$ $m^3/kg.s^2$;
1 ano $\approx 3{,}1 \times 10^7$ s.

a) $4{,}0 \times 10^6$

b) $4{,}3 \times 10^6$

c) $4{,}6 \times 10^6$

d) $4{,}9 \times 10^6$

e) $5{,}2 \times 10^6$

Q6 - P2 2022

Resposta: b) $4{,}3 \times 10^6$

Como a órbita é circular, a velocidade tangencial V é constante e podemos achar o raio orbital R através da seguinte relação:

$$2\pi R = VP \leftrightarrow R = \frac{VP}{2\pi}$$

Substituindo-se os valores:

$$R = \frac{1.783 \times 10^3 \frac{m}{s} \times 20{,}2\ anos \times 3{,}1 \times 10^7 \frac{s}{ano}}{2\pi} \rightarrow R \cong 1{,}8 \times 10^{14}\ m$$

A módulo da velocidade orbital da estrela em torno do buraco negro será dado por:

$$V = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

Isolando M e substituindo-se os valores, temos:

$$M = \frac{V^2 R}{G} \rightarrow M = \frac{(1.783 \times 10^3)^2 \times 1{,}8 \times 10^{14}}{6{,}7 \times 10^{-11}} \rightarrow M \cong 8{,}5 \times 10^{36}\ kg$$

Em termos de massas solares a massa do buraco negro vale:

$$M = \frac{8{,}5 \times 10^{36}}{2{,}0 \times 10^{30}} \rightarrow M \cong 4{,}3 \times 10^6\ M_{Sol}$$

Q5 - P3 2022

5) M89 é uma das oito galáxias do aglomerado de Virgem que Charles Messier descobriu em 1781. Esta galáxia é elíptica do tipo E0, ou seja, M89 é praticamente esférica. Está localizado a cerca de 50 milhões de anos-luz de distância na constelação de Virgem.

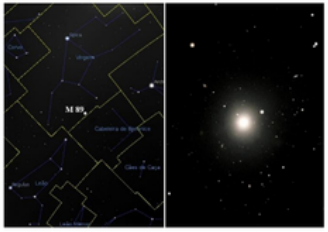


Imagem: Stellarium.

Seu diâmetro aparente de 4' (minutos de arco) corresponde a um diâmetro real de D = 70.000,0 anos-luz. M89 contém aproximadamente N = 100 bilhões de estrelas e sua magnitude aparente vale m = 9,8.

Assinale a opção que corresponde, aproximadamente, à distância média <d> entre duas estrelas de M89. Assuma, em primeira aproximação, que a distribuição das estrelas é uniforme em todo o volume.

a) 4,0 anos-luz

b) 7,0 anos-luz

c) 9,8 anos-luz

d) 12,2 anos-luz

e) 17,5 anos-luz

Q5 - P3 2022

Resposta: d) 12,2 anos-luz

O volume da galáxia é igual a:

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE ASTRONOMIA E ASTRONÁUTICA

$$V_{gal} = \frac{4}{3}\pi R_{gal}^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{D_{gal}}{2}\right)^3$$

Substituindo-se os valores:

$$V_{gal} = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{70.000,0}{2}\right)^3 \rightarrow V_{gal} \cong 1,8 \times 10^{14}\ ano-luz^3$$

Como neste volume há N estrelas, é como se cada estrela, em média, estivesse no centro de um cubo cujo volume é dado pela quantidade:

$$V_{est} = \frac{V_{gal}}{N} = \frac{1,8 \times 10^{14}\ ano-luz^3}{1,0 \times 10^{11}} = 1,8 \times 10^3\ ano-luz^3$$

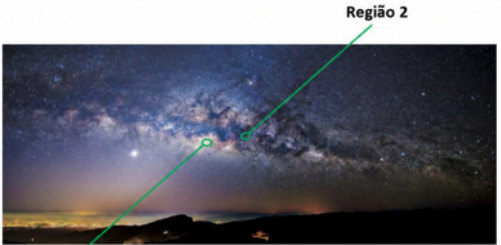
A raiz cúbica desse volume, portanto, fornece o lado L do cubo que contém a estrela. Obviamente estará distante dos lados do cubo por uma quantidade igual a L/2 para termos a distância média <d> entre duas estrelas, portanto, precisamos multiplicar essa quantidade por 2 e finalmente obter <d> = L

$$\langle d \rangle = L = \sqrt[3]{V_{est}} = \sqrt[3]{1,8 \times 10^3} \rightarrow \langle d \rangle \cong 12,2\ anos-luz$$

Resolução dos exercícios

Q2 - P1 2023

2) A imagem abaixo compara duas regiões do núcleo da Galáxia (Via Láctea) quando observadas na região visível do espectro eletromagnético em uma noite de céu limpo.



Via Láctea.

Assinale a alternativa que contém a informação correta.

a) A diferença de brilho entre as regiões 1 e 2 se explica pelo fato da região 2 ser mais rica em matéria do meio interestelar, como gás e poeira, que bloqueiam a luz das estrelas vinda do núcleo galáctico.

b) A diferença de brilho entre as regiões 1 e 2 se explica pelo fato da região 1 ser mais populosa em estrelas do que a região 2.

c) A diferença de brilho entre as regiões 1 e 2 se explica pelo fato da região 2 possuir estrelas mais antigas, portanto menos luminosas.

d) A diferença de brilho entre as regiões 1 e 2 se explica pelo fato da região 1 possuir estrelas mais quentes, portanto mais luminosas.

e) A diferença de brilho entre as regiões 1 e 2 se explica pelo fato da região 1 estar mais perto de nós e, portanto, parecer mais brilhante para nós.

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE ASTRONOMIA E ASTRONÁUTICA

Resolução dos exercícios

Q2 - P1 2023

Resposta: a) A diferença de brilho entre as regiões 1 e 2 se explica pelo fato da região 2 ser mais rica em matéria do meio interestelar, como gás e poeira, que bloqueiam a luz das estrelas vinda do núcleo galáctico.

Comentário: Até 1930, acreditava-se que a diferença de brilho (na região visível) encontrado ao longo da Via Láctea era resultado da diferença de densidade de estrelas por região. As regiões escuras, como a região 2 por exemplo, eram vazios de estrelas. Hoje já se sabe que as manchas escuras são provas de que o meio interestelar é mais rico e complexo do que se imaginava. As regiões escuras (região 2) são regiões ricas em matéria, como gás e poeira, que bloqueiam a luz vinda de estrelas mais distantes.

Resolução dos exercícios

Q10 - P1 2023

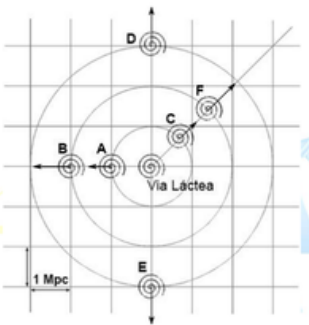
10) A velocidade de recessão das galáxias é a velocidade com que as galáxias estão se afastando umas das outras. Essa velocidade é proporcional à distância entre as galáxias. A Constante de Hubble, H_0, é uma constante de proporcionalidade que representa a taxa de expansão do Universo.

A Lei de Hubble afirma que a velocidade **v** de recessão de uma galáxia é proporcional à sua distância **d** até a Terra, medida em megaparsecs (Mpc). Essa relação é expressa pela equação:

$$v = H_0 \times d$$

O valor mais aceito atualmente da Constante de Hubble é $H_0 = 72$ km/s/Mpc.

Suponha que 6 galáxias (**A**, **B**, **C**, **D**, **E** e **F**) se encontrem distribuídas em torno da Via Láctea segundo a figura seguinte. Por simplicidade, considere todas no mesmo plano da Via Láctea e despreze o movimento próprio das galáxias.



Assinale a opção que traz as velocidades, respectivamente, do centro da **Via Láctea** e do centro da **galáxia C**, medidas por um hipotético observatório astronômico localizado no centro da **galáxia F**.

Nota: velocidade positiva significa afastamento e velocidade negativa significa aproximação.

a) 144 km/s e 72 km/s

b) 144 km/s e -72 km/s

c) -144 km/s e 72 km/s

d) 72 km/s e 144 km/s

e) 216 km/s e 288 km/s

Resolução dos exercícios

Q10 - P1 2023

Resposta: a) 144 km/s e 72 km/s

Comentário: Vemos na figura que a Via Láctea se encontra a 2 Mpc da galáxia F, portanto sua velocidade de recessão vale v = 72 km/s/Mpc × 2 Mpc = 144 km/s. A galáxia C, por sua vez se encontra a 1 Mpc da galáxia F, portanto sua velocidade de recessão vale v = 72 km/s/Mpc × q Mpc = 72 km/s.

Resolução dos exercícios

Q8 - P3 2023

8) **Messier 32** (NGC 221) é uma galáxia elíptica, satélite da Galáxia de Andrômeda, localizada a cerca de 2,9 milhões anos-luz de distância, na direção da constelação de Andrômeda. Possui aproximadamente oito mil anos-luz de diâmetro e uma magnitude aparente de $\mathbf{m_{total} = 8{,}1}$. Ela foi descoberta pelo astrônomo francês Guillaume Le Gentil (1725 - 1792) em 1749.



Considere que existam cerca de **250 milhões de estrelas** na galáxia elíptica M32.

Assinale a opção que traz a magnitude aparente **m**, aproximada, de apenas uma estrela desta galáxia, fazendo a suposição, em primeira aproximação, de que as luminosidades de todas estas estrelas são iguais.

a) m = 29,1

b) m = 26,6

c) m = 31,6

d) m = 21,8

e) m = 27,3

Resolução dos exercícios

Q8 - P3 2023

Resposta: a) m = 29,1

Em geral, dado qualquer número de estrelas, seus fluxos podem ser somados para se obter sua magnitude total.

OLIMPIADA BRASILEIRA DE ASTRONOMIA E ASTRONÁUTICA

Pode-se mostrar que no caso de **n** estrelas a fórmula geral é[1]:

$$m_{total} = -2{,}5\log(10^{-0{,}4m_1} + 10^{-0{,}4m_2} + \cdots + 10^{-0{,}4m_n})$$

Neste caso, como n vale 250.000.000, temos:

$$8{,}1 = -2{,}5\log(2{,}5 \times 10^8 \times 10^{-0{,}4m})$$

$$\frac{8{,}1}{-2{,}5} = -3{,}24 = \log(2{,}5 \times 10^8 \times 10^{-0{,}4m})$$

$$-3{,}24 = \log(2{,}5) + \log(10^8) + \log(10^{-0{,}4m})$$

$$-3{,}24 = 0{,}39794 + 8 - 0{,}4m$$

$$0{,}4m = 11{,}63794$$

$$m = \frac{11{,}63794}{0{,}4} \rightarrow m \cong 29{,}1$$

Resolução dos exercícios

Q9 - P3 2024

9) Na física, um corpo negro é um objeto teórico que absorve toda a radiação que chega até ele. A temperatura desse corpo negro depende da quantidade de radiação absorvida, que por sua vez determina as frequências e as intensidades da radiação eletromagnética que ele emite.

Um buraco negro isolado é um corpo negro quase perfeito e, como tal, segue regras semelhantes de emissão e absorção. A temperatura de um buraco negro (em primeira aproximação) é a radiação que ele emite, chamada **Radiação Hawking**, e depende apenas da sua massa. A relação entre a temperatura T_{BN} e a massa M_{BN} de um buraco negro está definida na seguinte equação:

$$T_{BN} = \frac{hc^3}{16\pi^2 G M_{BN} k_B}$$

onde: $\boldsymbol{h}$ é a Constante de Planck, $\boldsymbol{c}$ é a velocidade da luz, $\boldsymbol{G}$ é a Constante Gravitacional Universal e $\boldsymbol{k_B}$ é a Constante de Boltzmann.

Na realidade, muitos dos buracos negros encontrados no Universo absorvem e interagem com outros objetos massivos. Portanto, sua temperatura real é diferente da temperatura esperada do corpo negro.

Vamos considerar um sistema binário não interativo, composto por uma estrela e um buraco negro. Por "não interativo" entenda que não há troca de matéria entre a estrela e o buraco negro e, portanto, não há um disco de acreção em torno dele. A influência mútua é apenas gravitacional.

A estrela tem supostamente 2,5 vezes a massa do Sol e ela gira em torno do centro de massa do sistema com período orbital P = 81 dias e semieixo maior a = 0,68 UA.

Com essas informações, assinale a opção que traz a temperatura teórica aproximada desse buraco negro.

Dados: $h = 6{,}63 \times 10^{-34}$ Js; $c = 3{,}00 \times 10^{8}$ ms^{-1}; $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2}; $k_B = 1{,}38 \times 10^{-23}$ JK^{-1}; massa do Sol $M_{Sol} = 2{,}00 \times 10^{30}$ kg; UA = $1{,}50 \times 10^{11}$ m

a) $1{,}38 \times 10^{-8}$ K

b) $1{,}58 \times 10^{-8}$ K

c) $3{,}16 \times 10^{-8}$ K

d) $3{,}95 \times 10^{-8}$ K

e) $6{,}32 \times 10^{-8}$ K

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE ASTRONOMIA E ASTRONÁUTICA

Resolução dos exercícios

Q9 - P3 2024

Resposta: b) $1{,}58 \times 10^{-8}$ K

Antes de aplicar a fórmula da temperatura, precisamos saber a massa do buraco negro. Para isso vamos usar 3ª Lei de Kepler generalizada:

$$(M+m) = \frac{4\pi^2}{G}\frac{a^3}{P^2}$$

$$M_{BN} = \frac{4\pi^2}{G}\frac{a^3}{P^2} - m_{estrela}$$

Como todos os valores estão em unidades do SI, podemos não escrever as unidades para não sobrecarregar a equação. Substituindo-se os valores, temos:

$$M_{BN} = \frac{4\pi^2}{(6{,}67 \times 10^{-11})}\frac{(0{,}68 \times 1{,}50 \times 10^{11})^3}{\left(81\ dias \times 24\frac{h}{dia} \times 3.600\frac{s}{h}\right)^2} - (2{,}50 \times 2{,}00 \times 10^{30})$$

$$M_{BN} \cong 1{,}28 \times 10^{31}\ kg - 5{,}00 \times 10^{30}\ kg = 7{,}80 \times 10^{30}\ kg$$

Agora, basta aplicar a fórmula dada para calcular a temperatura desse BN:

$$T_{BN} = \frac{(6{,}63 \times 10^{-34})(3{,}00 \times 10^{8})^3}{16\pi^2(6{,}67 \times 10^{-11})(7{,}80 \times 10^{30})(1{,}38 \times 10^{-23})}$$

$$T_{BN} \cong 1{,}58 \times 10^{-8}\ K$$

Apenas a título de comparação, a radiação cósmica de fundo em micro-ondas é uma radiação eletromagnética que preenche todo o Universo, cujo espectro é o de um corpo negro a uma temperatura de 2,725 K.

Resolução dos exercícios

Q16 - P3 2024

16) Ao contrário do que muitos podem pensar, o raio de influência gravitacional do super buraco negro central da Via Láctea, conhecido como *Sagittarius A** (lê-se: Sagitarius A "estrela"), com massa equivalente à 4,3 milhões de massas solares, é de alguns anos-luz. O que significa que o que mantém a Via Láctea unida é a gravidade de todo o resto - estrelas, gás, poeira e matéria escura. Percebemos, então, que a influência gravitacional de *Sagittarius A** sobre o Sol, que está a cerca de 26.000 anos-luz do centro da Via Láctea, é desprezível.

Podemos definir a esfera de influência gravitacional como uma região em torno de um buraco negro supermassivo na qual o movimento das estrelas se deve ao buraco negro. O raio desta esfera é denominado **raio de influência gravitacional** r_i e pode ser calculado através da seguinte fórmula:

$$r_i = \frac{GM_{BN}}{\sigma^2},$$

onde **G** é a Constante de Gravitação Universal, $\mathbf{M_{BN}}$ é a massa do buraco negro e **σ** é uma grandeza que tem a ver com a média das velocidades das estrelas em torno do buraco negro. Para *Sagittarius A** este raio vale aproximadamente $\mathbf{r_i}$ **= 10 anos-luz**.

NGC 3258 é uma galáxia elíptica gigante localizada na direção da constelação da Máquina Pneumática (Antlia). Os astrônomos sabem que em seu centro existe um super buraco negro com cerca de **520 vezes** a massa de *Sagittarius A** e que seu **σ** tem **3,3 vezes** o **σ** de *Sagittarius A**.

Sendo assim, assinale a opção que traz o valor aproximado do raio de influência gravitacional para o super buraco negro central da **Galáxia NGC 3258**.

a) 33,0 anos-luz

b) 330,0 anos-luz

c) 477,5 anos-luz

d) 520,0 anos-luz

e) 606,0 anos-luz

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE ASTRONOMIA E ASTRONÁUTICA

Q16 - P3 2024

Resposta: c) 477,5 anos-luz

Das informações do texto, temos:

$$M_{BN}^{NGC} = 520 M_{BN}^{VL}$$

$$\sigma^{NGC} = 3{,}3\sigma^{VL}$$

Equacionando o raio de influência gravitacional super buraco negro central de NGC 3258, temos:

$$r_i^{NGC} = \frac{G M_{BN}^{NGC}}{(\sigma^{NGC})^2}$$

Fazendo as substituições:

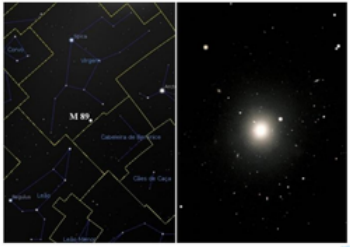
$$r_i^{NGC} = \frac{G(520 M_{BN}^{VL})}{(3{,}3\sigma^{VL})^2} = \frac{520}{3{,}3^2}\left[\frac{G M_{BN}^{VL}}{(\sigma^{VL})^2}\right] = \frac{520}{10{,}89} \times 10\ anos - luz$$

$$r_i^{NGC} \cong 477{,}5\ anos - luz$$

Resolução dos exercícios

Q17 - P3 2024

17) M89 é uma das oito galáxias do aglomerado de Virgem que o astrônomo francês Charles Messier (1730-1817) descobriu em 1781. Esta galáxia é elíptica do tipo E0, ou seja, M89 é praticamente esférica. Está localizado a cerca de 50 milhões de anos-luz de distância na constelação de Virgem.



Seu diâmetro aparente de 4' (minutos de arco) corresponde a um diâmetro real de D = 70.000,0 anos-luz. M89 contém aproximadamente N = 100 bilhões de estrelas e sua magnitude aparente vale m = 9,8.

Em primeira aproximação, vamos considerar que todas as estrelas de M89 são semelhantes entre si e que têm a mesma magnitude absoluta.

Deste modo, assinale a opção que traz a magnitude aparente de cada uma destas estrelas.

a) 9,8

b) 15,1

c) 17,7

d) 27,5

e) 37,3

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE ASTRONOMIA E ASTRONÁUTICA

Q17 - P3 2024

Resposta: e) 37,3

Primeiramente, vamos relembrar a fórmula da soma de magnitudes. Se uma estrela de um binário tem magnitude aparente m_1 e a outra estrela, m_2, então a soma total das magnitudes (m_T) será:

$$m_T = -2{,}5\log(10^{-0{,}4m_1} + 10^{-0{,}4m_2})$$

Neste caso em particular de M89, todas as 100 bilhões de estrelas têm a mesma magnitude m:

$$m_T = -2{,}5\log(10^{-0{,}4m} + 10^{-0{,}4m} + \cdots + 10^{-0{,}4m})$$

$$m_T = -2{,}5\log(10^{11} \times 10^{-0{,}4m})$$

$$m_T = -2{,}5\log(10^{11}) - 2{,}5\log(10^{-0{,}4m})$$

$$9{,}8 = -2{,}5 \times 11 - 2{,}5 \times (-0{,}4m)$$

$$9{,}8 = -27{,}5 + m \rightarrow m = 27{,}5 + 9{,}8 = 37{,}3$$

Resolução dos exercícios

Q19 - P3 2024

19) Um buraco negro é um objeto extremamente denso no espaço. Embora possam ser enigmáticos, a Ciência conseguiu decifrar muito sobre eles. Por exemplo, sabemos que os buracos negros são uma manifestação fundamental da gravidade.

Quando uma grande quantidade de massa é comprimida em um espaço pequeno o suficiente, o objeto resultante rompe o próprio tecido do espaço e do tempo, tornando-se o que é chamado de singularidade. Se considerarmos a velocidade da luz como limite da velocidade de escape de um buraco negro, chegamos ao que se conhece como **Raio de Schwarzschild** r_{Sch} de uma região esférica em torno da singularidade.

$$r_{Sch} = \frac{2GM_{bn}}{c^2}$$

Como temos uma região esférica em torno da singularidade, podemos dividir a massa do buraco negro por esse volume e definir uma densidade média para um buraco negro, apesar da densidade ser considerada infinita para a singularidade em si.

Sendo assim, assinale a opção que traz a massa aproximada de um buraco negro, em unidades de massa solar, com a mesma densidade média da Terra.

Dados: massa do Sol $M_{Sol} = 2{,}00 \times 10^{30}$ kg, massa da Terra $M_{Terra} = 5{,}97 \times 10^{24}$ kg, Raio da Terra $R_{Terra} = 6{,}37 \times 10^{6}$ m, $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ $m^3 kg^{-1} s^{-2}$, $c = 3{,}00 \times 10^{8}$ ms^{-1}

a) $5{,}51 \times 10^{3}$

b) $6{,}67 \times 10^{5}$

c) $1{,}15 \times 10^{7}$

d) $5{,}75 \times 10^{7}$

e) $3{,}00 \times 10^{8}$

Resolução dos exercícios

Q19 - P3 2024

Resposta: d) $5{,}75 \times 10^7$

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE

Primeiro precisamos achar a densidade média da Terra, que não foi dada:

Densidade da Terra: massa da Terra/volume da Terra

$$\rho_{Terra} = \frac{5{,}97 \times 10^{24}\ kg}{\frac{4}{3}\pi(6{,}37 \times 10^{6}\ m)^3} \cong 5{,}51 \times 10^{3}\ \frac{kg}{m^3}$$

O buraco negro tem um raio igual ao raio de Schwarzschild:

$$r_{Sch} = \frac{2GM_{bn}}{c^2}$$

Sua densidade média, então, será:

$$\rho_{bn} = \frac{M_{bn}}{V_{Sch}} = \frac{M_{bn}}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{2GM_{bn}}{c^2}\right)^3} = \frac{3c^6}{32\pi G^3 M_{bn}^2}$$

Isolando a massa do buraco negro, teremos:

$$M_{bn}^2 = \frac{3c^6}{32\pi G^3 \rho_{bn}}$$

Como ρ_{bn} tem que ser igual a ρ_{Terra} e substituindo-se os valores, teremos:

$$M_{bn} = \sqrt{\frac{3 \times (3 \times 10^8)^6}{32\pi \times (6{,}67 \times 10^{-11})^3 \times 5{,}51 \times 10^3}}$$

$$M_{bn} \cong 1{,}15 \times 10^{38}\ kg$$

Em termos de massas solares:

$$M_{bn} = \frac{1{,}15 \times 10^{38}\ kg}{2{,}00 \times 10^{30}\ kg} = 5{,}75 \times 10^{7}\ M_{Sol}$$

Resolução dos exercícios

Q10 - P1 2025

10) O astrônomo estadunidense Edwin Powell Hubble (1889-1953), no início do século XX, demonstrou que o Universo está em expansão. Essa descoberta revolucionou a cosmologia.

Qual evidência Hubble utilizou para propor a lei que hoje leva o seu nome?

a) O movimento retrógrado dos planetas.

b) A observação de pulsares na Via Láctea.

c) A radiação cósmica de fundo em micro-ondas.

d) A detecção de buracos negros supermassivos.

e) O desvio para o vermelho da luz de galáxias distantes.

Resolução dos exercícios

Q10 - P1 2025

Resposta: e) O desvio para o vermelho da luz de galáxias distantes.

Comentário: O desvio para o vermelho evidencia que o objeto celeste está se afastando de nós. Hubble também observou que a velocidade com que as galáxias se afastam é proporcional à sua distância.

Resolução dos exercícios

Q14 - P2 2025

14) O raio de Schwarzschild (R_S), que define o horizonte de eventos de um buraco negro não rotativo, é diretamente proporcional à sua massa (M): $R_S = \frac{2GM}{c^2}$. Considere Sagitário A* (Sgr A*), o buraco negro supermassivo no centro da Via Láctea, com massa $M_{SgrA^*} \approx 4 \times 10^6 M_{Sol}$, e um buraco negro estelar típico, formado pelo colapso de uma estrela massiva, com massa $M_{Estelar} \approx 10 M_{Sol}$.

Qual é a razão entre o volume contido dentro do horizonte de eventos de Sgr A* e o volume contido dentro do horizonte de eventos do buraco negro estelar? (Assuma que os horizontes são esféricos).

a) $2{,}0 \times 10^3$

b) $4{,}0 \times 10^5$

c) $6{,}0 \times 10^{11}$

d) $8{,}0 \times 10^{15}$

e) $6{,}4 \times 10^{16}$

Q14 - P2 2025

Comentários: O raio de Schwarzschild é proporcional à massa ($R_S \propto M$). O volume dentro do horizonte (esférico) é proporcional ao cubo do raio ($V \propto R_S^3$). Combinando, o volume é proporcional ao cubo da massa ($V \propto M^3$).

A razão entre os volumes é a razão entre as massas ao cubo:

$$\frac{V_{SgrA*}}{V_{Estelar}} = \left(\frac{M_{SgrA*}}{M_{Estelar}}\right)^3 = \left(\frac{4 \times 10^6 M_{Sol}}{10 M_{Sol}}\right)^3 = (4 \times 10^5)^3 = 64 \times 10^{15} = 6.4 \times 10^{16}$$

Resolução dos exercícios

Q15 - P2 2025

15) A Lei de Hubble descreve a expansão do Universo: v = H_0d. Medições precisas indicam que a constante de Hubble H_0 tem um valor próximo a 70 km/s/Mpc.

O **Tempo de Hubble (t_H)** é definido como o inverso da constante de Hubble ($t_0 = 1/H_0$) e representa, sob certas simplificações, uma estimativa da idade do Universo.

Considerando que o valor exato seja $H_0 = 70 \frac{km}{s \cdot Mpc}$, calcule o Tempo de Hubble em bilhões de anos (Gyr).

Dados: $1\ Mpc\ (Megaparsec) \approx 3{,}09 \times 10^{19} Km$; $1\ ano \approx 3{,}15 \times 10^{7} s$;
$1\ bilhão\ de\ anos\ (Gyr) = 10^{9}\ anos$

a) ≈1,4 Gyr

b) ≈7,0 Gyr

c) ≈10,0 Gyr

d) ≈14,0 Gyr

e) ≈70,0 Gyr

Resolução dos exercícios

Q15 - P2 2025

Comentários: As Unidades de H_0: A constante de Hubble está em $\frac{Km/s}{Mpc}$.

Convertendo Mpc para km: A gente usa o fator de conversão dado:

$$1\,Mpc \approx 3.09 \times 10^{19}\,km$$

Reescrevendo H_0:

$$H_0 = \frac{70\,km/s}{1\,Mpc} \approx \frac{70\,km/s}{3.09 \times 10^{19}\,km}$$

$$H_0 \approx 2.265 \times 10^{-18}\,s^{-1}$$

Calculando o Tempo de Hubble (t_H) em segundos:

$$t_H = \frac{1}{H_0} \approx \frac{1}{2.265 \times 10^{-18}\,s^{-1}}$$

$$t_H \approx 4.415 \times 10^{17}\,s$$

Convertendo segundos para anos:

$$t_H(\text{anos}) = \frac{4.415 \times 10^{17}\,s}{3.15 \times 10^{7}\,s/ano}$$

$$t_H(\text{anos}) \approx 1.40 \times 10^{10}\,\text{anos}$$

Convertendo para bilhões de anos (Gyr):

$$1.40 \times 10^{10}\,\text{anos} = 14.0 \times 10^{9}\,\text{anos} = 14.0\,Gyr$$

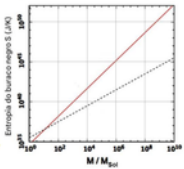
OLIMPÍADA BRASILEIRA DE ASTRONOMIA E ASTRONÁUTICA

Resolução dos exercícios

Q15 - P3 2025

15) No filme *Interstellar*, acompanhamos uma longa jornada pelo universo em busca de melhores condições de vida para os humanos da Terra. Na trama, é apresentado o planeta Miller, localizado a uma distância R do centro de um buraco negro supermassivo chamado Gargantua, de massa M. Sabe-se que a entropia de Gargantua está relacionada à sua massa. Temos a informação que a entropia de Gargantua **S = 10^{40} J/K**.

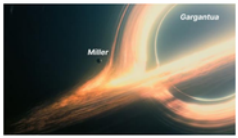
A entropia é uma grandeza física que mede o grau de desordem ou o número de microestados possíveis de um sistema. No gráfico abaixo, representado em escala logarítmica, onde marcações igualmente espaçadas representam saltos iguais no expoente de 10, observa-se a relação (linha tracejada) entre a entropia **S** e a massa **M** (em unidades da massa solar). A linha contínua vermelha do gráfico se refere ao buraco negro.



Sabe-se que o tempo se dilata devido à presença de corpos massivos (isto é, o buraco negro desconsiderando a rotação), de acordo com a seguinte fórmula:

$$t_0 = t_f \sqrt{1 - \frac{R_s}{R}}$$

Onde R_s é o raio de Schwarzschild do buraco negro, t_0 é o tempo medido por um observador sob a influência gravitacional (no planeta Miller), e t é o tempo medido por um observador distante do buraco negro (isto é, o tempo normal, sem dilatação).



Sabendo que os astronautas Cooper e Brandt passaram 3,5 horas no planeta Miller, enquanto no espaço vazio, longe da influência da dilatação temporal, se passaram 7,0 horas, calcule a distância R, aproximada, do planeta Miller ao centro de Gargantua.

Dados: Raio de Schwarzschild $R_s = 2GM/c^2$, Constante Gravitacional G = 6,7 × 10^{-11} Nm^2/kg^2, Velocidade da Luz c = 3,0 × 10^5 km/s, Massa do Sol M = 2,0 × 10^{30} kg

a) 4,0 × 10^9 m
b) 5,0 × 10^9 m
c) 2,5 × 10^9 m
d) 3,0 × 10^9 m
e) 8,0 × 10^9 m

Resolução dos exercícios

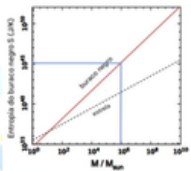
Q15 - P3 2025

Resposta: a) $4{,}0 \times 10^9$ m

Comentários:

Com a massa do buraco negro Gargantua, podemos calcular seu raio de Schwarzschild:

$$R_s = 2GM/c^2$$



Pelo gráfico, sabemos que M é 1 milhão de vezes a massa do Sol. Usando os valores das constantes, chegamos que o raio

$$R_S = \frac{2 \times 6{,}7 \times 10^{-11} \times 10^6 \times 2 \times 10^{30}}{(3{,}0 \times 10^8)^2} \rightarrow R_S \cong 3{,}0 \times 10^9\ m$$

Agora, vamos isolar R na fórmula da dilatação do tempo:

$$t_0 = t_f \sqrt{1 - \frac{R_s}{R}}$$

Elevando ambos os lados ao quadrado:

$$\left(\frac{t_0}{t_f}\right)^2 = 1 - \frac{R_s}{R} \rightarrow R = \frac{R_s}{1 - \left(\frac{t_0}{t_f}\right)^2}$$

Substituindo-se os valores:

$$R = \frac{3{,}0 \times 10^9}{1 - \left(\frac{4{,}5}{7{,}5}\right)^2} \rightarrow R = 4{,}0 \times 10^9\ m$$